Aplicando a regra da primitivação por partes, temos:

$$P(x\ln x\ ) = \frac{x^2}{2}\ln x - P(\frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}P(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{2} + c,\ c \in IR$$

Nota que a constante $c \in IR$ só foi colocada no final para não atrapalhar os cálculos intermediários.

Exemplo:

Usar sucessivamente a técnica da primitivação por partes para calcular $I = P(x^2 \cos x)$.

Tomamos $* \longrightarrow \left| \begin{array}{l} f(x)=x^2 \Rightarrow f'(x)=2x \\ \\ P(g'(x))=P(\cos x) \Rightarrow g(x)=senx \end{array} \right.$

Primitivando por partes, obtemos:

$$I \overset{(*)}{=} x^2 senx - P(2xsenx)$$

Tomamos $** \longrightarrow \left| \begin{array}{l} f(x)=x \Rightarrow f'(x)=dx \\ \\ P(g'(x))=P(senx) \Rightarrow g(x)=-\cos x \end{array} \right.$

$$I \overset{(**)}{=} x^2 senx - 2\left[-x\cos x - P(\cos x)\right].$$

Ou seja,

$$I = x^2 senx + 2x\cos x - 2senx + c,\ c \in IR$$

Tarefa 35

Usa a técnica de primitivação por partes para calcular:

a) $P(\ln x)$

b) $P(x\sin(2x))$

c) $P(xe^x)$

d) $P(\frac{\ln x}{x^2})$

Noção de soma integral

A noção de soma integral assenta no **método da exaustão** atribuído a Eudoxo (406-355 a.C.), desenvolvido e aperfeiçoado por Arquimedes (287-212 a.C.). Este método consiste em aproximações sucessivas da figura dada por meio de outras de áreas e volumes conhecidos.

O caso mais conhecido é o famoso problema da *quadratura do círculo*, isto é, o problema de obter um quadrado com a mesma área de um círculo de raio *r* dado.

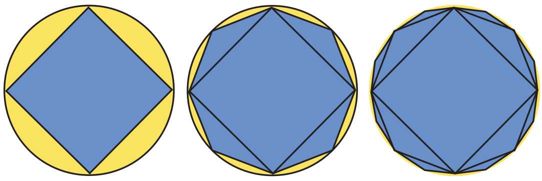
Exemplo:

Uma primeira aproximação para a área do círculo é dada pela área do quadrado inscrito no círculo. Com o acréscimo de quatro triângulos

Referência histórica

Arquimedes de Siracusa (287 – 212 aC), pela originalidade de seus métodos e pelo rigor de suas demonstrações, é considerado um dos mais ilustres matemáticos da antiguidade. Interessava-se tanto pela matemática pura quanto pela aplicada e criou dois ramos da física (estática e hidrodinâmica). Tornou-se famoso por suas invenções mecânicas, algumas delas utilizadas na defesa da cidade de Siracusa.

isósceles convenientes, obtemos o octógono regular inscrito no círculo, cuja área fornece uma aproximação melhor à área do círculo.



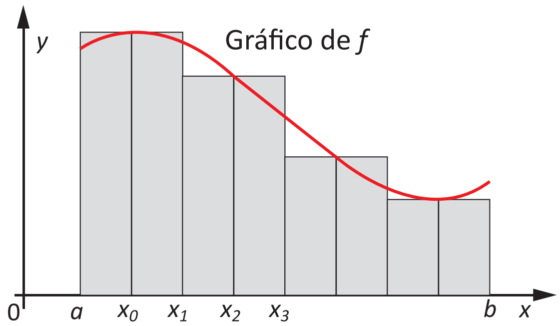
Do ponto de vista geométrico, é possível aproximar a área do círculo com polígonos regulares inscritos de 2^n lados, obtendo aproximações cada vez melhores para a área do círculo.

Usando um procedimento similar a este, com polígonos inscritos e circunscritos, Arquimedes calculou a área do círculo de raio unitário mostrando que a área $A = \pi$ (lê-se 'pi') é um valor real compreendido entre 3 +10/71 (por defeito) e 3 + 1/7 (por excesso).

Ou seja: 3,140485 < π < 3,142857 (próximo com 6 casas decimais).

Área sob uma curva: Integral definida

O que permitiu a passagem do método de exaustão de Arquimedes para o conceito de integral foi a noção que, em certos casos, a área da região pode ser calculada sempre com o mesmo tipo de aproximação por áreas de retângulos.



Uma partição de um intervalo $\left[a,b\right]$ da reta real é um conjunto finito de pontos $\left\{x_o, x_{1,} \ldots, x_n\right\}$ em IR tal que: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Dado um intervalo $[a,b]$, podemos tomar uma partição muito particular, como aquela que toma pontos de modo que os sub intervalos da partição tenham comprimentos iguais. Seja, $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ o j-ésimo subintervalo da partição.

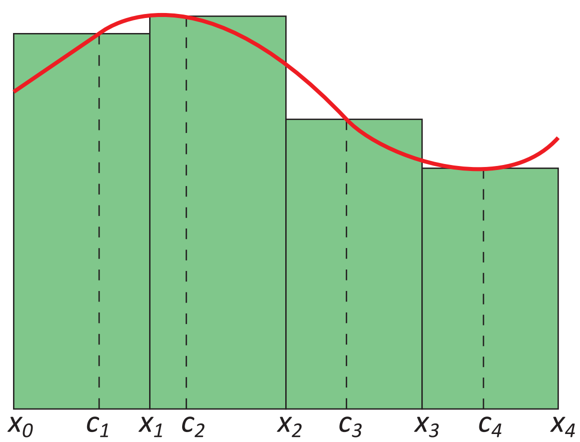
Definição de Cauchy- Riemann

Seja $f:[a,b] \to IR$ limitada e tal que $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$.

Considere-se uma partição: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ do intervalo $[a,b]$ que contenha todos os n sub intervalos com o mesmo comprimento $\Delta x = \dfrac{(b-a)}{n}$.

Tomamos apenas os primeiros pontos da partição e fazemos uma análise geométrica da curva no sub-intervalo $[x_0, x_1]$ (para os outros sub intervalos ocorre uma situação similar).

Então, a área sob a curva no intervalo $[x_0, x_1]$ pode ser obtida através da área S_1 do retângulo cuja base mede $\Delta x = x_1 - x_o$ e a altura é a linha tracejada cuja medida é dada por $f(c_1)$, onde c_1 é um ponto em $[x_0, x_1]$



Existe uma diferença residual entre as áreas que ficam acima da curva e dentro do retângulo e abaixo da curva e fora do retângulo.

Em cada sub intervalo $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ desta partição tomamos um ponto genérico qualquer c_j e formamos n retângulos, todos com as bases de medida Δx e alturas dadas por, $f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n)$

Referência histórica

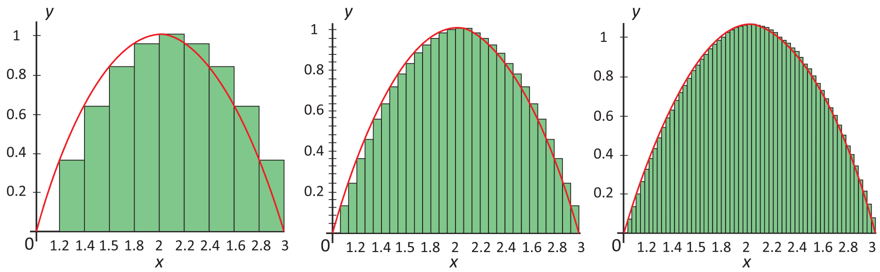
Os estudos do matemático francês **Augustin Cauchy (1789-1857)** foram muito importantes por terem dado início à investigação sobre os fundamentos do Cálculo Integral, levando ao desenvolvimento da análise matemática e da teoria das funções.

O matemático alemão **Bernhard Riemann (1826-1866)** realizou um estudo bem mais aprofundado sobre a integral e em sua homenagem a integral estudada por ele passou a receber o nome de Integral de Riemann.

Se a partição tem n sub intervalos, seja S_n a soma das áreas dos n retângulos.

Temos que:

$$S_n = f\left(c_1\right)\Delta x + f\left(c_2\right)\Delta x + \;...,+ f\left(c_n\right)\Delta x = \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x$$



Para todos os valores de n é possível formar uma sucessão numérica $\{S_1,\, S_{2;}...,\, S_n,...\}$ de todas as somas parciais que correspondem, cada uma à área do retângulo de base Δx e altura $f(c_j),\, j = 1,2,3,...,n$.

Se esta sucessão é convergente para um número real bem definido, obtemos uma estimativa para a área da região delimitada pelo gráfico da função f e pelo eixo Ox, entre as retas $x = a$ e $x = b$.

Neste caso,

***f* é integrável no intervalo** $\left[a,b\right]$ e o limite desta sequência é a soma integral das áreas de todos os retângulos,

$$s = \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

- A expressão $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x$ é o limite da sequência das somas parciais S_n, também chamadas de somas de Darboux-Riemann.
- Se a função f é integrável, a soma $\int_a^b f(x)\,dx$ é chamada **integral definida de Riemann**, no intervalo $\left[a,b\right]$.

Exemplo:

Calcular $\int_{-1}^{1} 3.dx,\ c \in IR$

Representando graficamente a função integranda, definida por $f(x)=3$, (função constante) verificamos que podemos obter a área do retângulo limitado pelas retas $y=3$, $y=0$, $x=-1$ e $x=1$.

Sabemos que a área $A = |1-(-1)| \times 3 = 6$.

Vamos calcular a área, tendo em conta a definição de integral definida:

$$\int_{-1}^{1} 3\ dx = \lim_{\Delta x_j \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(c_j)\Delta x_j$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{j=1}^{n} 3 \times \Delta x_j = 3 \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{j=1}^{n} \Delta x_j = 3 \lim_{\Delta x \to 0} (1-(-1)) = 3(1+1) = 6$$

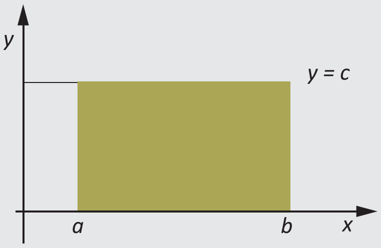
Ou seja, $\int_{-1}^{1} 3dx = 6$ unidades de área.

Observações:

- A integral definida de Riemann corresponde à área da figura delimitada pelo gráfico de f, pelo eixo Ox e pelas retas verticais $x=a$ e $x=b$.
- A existência e o valor do limite s deve ser independente da escolha dos pontos $c_1, \ldots, c_n$ nos sub intervalos de $[a,b]$.
- O limite s da sequência das somas S_n pode existir ou não.
- Determinar condições necessárias e suficientes para que uma função seja integrável (segundo Riemann) é uma questão que requer conceitos que são abordados num nível mais avançado da análise matemática e não são do âmbito do programa.
- Toda a função contínua definida num intervalo limitado e fechado é integrável, segundo Riemann.
- Uma função limitada definida num conjunto fechado e limitado $[a,b]$ é integrável, segundo Riemann, se o número de pontos de descontinuidade da função neste intervalo for finito.
- Se f não é necessariamente positiva em $[a,b]$, a integral de f pode também ser definida da mesma forma, mas alguns cuidados devem ser tomados quanto à sua interpretação.

Nota

No caso geral, sendo $a,b,c \in IR$



Se $b > a$, $c \neq 0$, então

$$\int_{a}^{b} c\,dx = c(b-a)$$

Tarefa 36

Calcula as integrais definidas:

a) $\int_{1}^{3} 2\ dx$

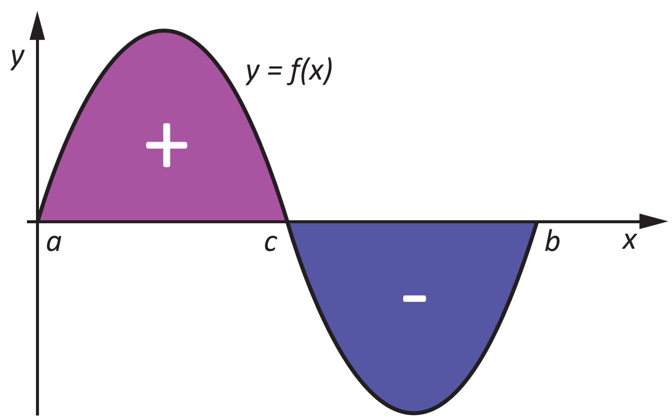
b) $\int_{-1}^{2} (-\frac{1}{3})dx$

c) $\int_{1}^{2} x\ dx$

d) $\int_{0}^{2\pi} senx\ dx$

Exemplo:

Seja a seguinte situação:



Consideremos o ponto $c \in [a,b]$ como um dos pontos da partição. Caso exista a integral de f sobre $[a,b]$, verifica-se pelas propriedades das somas integrais que:

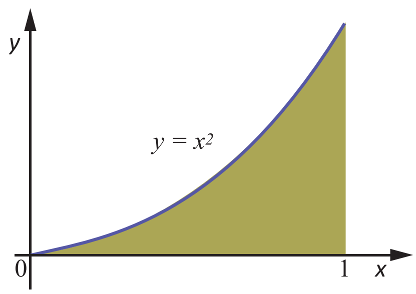
$f(x) > 0, \forall x \in]a,c[$ e $\int_a^c f(x)\,dx > 0$, coincide com a área (região rosa)

$f(x) < 0, \forall x \in]c,b[$ e, então $\int_c^b f(x)\,dx < 0$, pelo que a área (região azul)

é dada por $\left|\int_c^b f(x)\,dx\right| = -\int_c^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx, \text{ (c < b)}$

> A área delimitada pelo gráfico de uma função $y = f(x)$ e pelo eixo Ox, no intervalo $[a,b]$ é dada por:
>
> $$Área = \int_a^b |f(x)dx| = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx,$$
>
> ou seja: $Área = \int_a^c f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

Exemplo:



Para calcular a área da figura delimitada pela parábola $y = x^2$ o eixo Ox e a reta vertical $x = 1$, começamos por dividir o intervalo $[0,1]$ em n partes iguais de comprimento $\Delta x = \frac{1}{n}$.

Tomemos os pontos c_j como os extremos esquerdos de cada j-ésimo intervalo, de forma que:

$c_1 = 0,\ c_2 = \Delta x,\ c_3 = 2\ \Delta x,\ ...,\ c_n = \left(n-1\right)\Delta x$

Para $f(x) = x^2$, tomamos o comprimento $\Delta x = \frac{1}{n}$ e escrevemos a soma

$S_n = f\left(c_1\right)\times\frac{1}{n} + f\left(c_2\right)\times\frac{1}{n} + \ ... \ + f\left(c_n\right)\times\frac{1}{n}$ na forma:

$$S_n = \left[0^2 + (\frac{1}{n})^2 + (2\times\frac{1}{n})^2 + ... + (n\times\frac{1}{n}-\frac{1}{n})^2\right]\times\frac{1}{n} =$$

$$S_n = \frac{\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2\right]}{n^3} = \frac{\frac{(n-1).n.(2n-1)}{6}}{n^3}$$

$$S_n = \frac{\frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}}{n^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

Quando $n \to \infty$, a soma $s = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{3}$ e, então concluímos que a área da figura aproxima-se de $s = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$ (unidades de área).

Considera que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Propriedades da integral definida de Riemann

Seja $\int_a^b f(x)dx$ uma integral de Riemann.

A função f é designada por função integranda e os números reais a (limite inferior) e b (limite superior) por extremos ou limites de integração.

O intervalo $\left[a,b\right]$ é designado por intervalo de integração.

Considera-se ainda que:

$\int_a^a f(x)dx = 0$, quando $a = b$

$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, quando $b < a$

Nas propriedades seguintes, supondo que a função integranda é uma função contínua no intervalo de integração, admitimos sem mostrar a veracidade da seguinte proposição:

> Toda a função contínua num intervalo fechado $\left[a,b\right]$ é integrável, segundo Riemann, nesse intervalo.

Propriedade 1:

Se f é uma função integrável no intervalo $\left[a,b\right]$ e k uma constante qualquer, então a função kf é integrável em $\left[a,b\right]$ e

$$\int_a^b k.f(x)\,dx = k.\int_a^b f(x)\,dx$$

Propriedade 2:

Se f e g são duas funções integráveis no intervalo $\left[a,b\right]$, então $f+g$ é integrável no mesmo intervalo e além disso:

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

As duas proposições acima constituem as *propriedades lineares* da integral definida, sendo que as demonstrações das mesmas são relativamente simples, com o uso da definição de integral apresentada.

Propriedade 3:

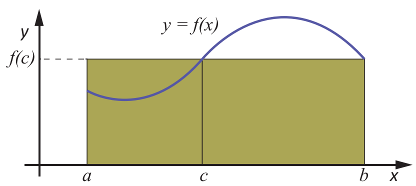
Se f é uma função integrável nos intervalos $\left[a,c\right]$ e $\left[c,b\right]$ sendo $a<c<b$ então *f* é integrável em $\left[a,b\right]$ e além disso:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Propriedade 4:

Sendo m e M, respetivamente, o menor e o maior valor da função integrável no intervalo $\left[a,b\right]$, então:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$



Propriedade 5 (Teorema da média):

Seja *f* uma função contínua num intervalo $\left[a,b\right]$. Pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe $c \in \left]a,b\right[$ tal que: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c).(b-a)$

Prova: Se *f* uma função contínua em $\left[a,b\right]$ podemos falar no menor e no maior valor que a função assume neste intervalo.

Sejam

$$m = \min\left\{f\left(x\right) : x \in \left[a,b\right]\right\} \text{ e } M = \max\left\{f\left(x\right) : x \in \left[a,b\right]\right\}.$$

Existem $x = x_0$ e $x = x_1$ tal que $m = f(x_0)$ e $M = f(x_1)$, os quais para todo $c_i, i = 1,2,...,n$, do intervalo $[a,b]$, temos:

$$m \leq f(c_i) \leq M$$

Donde, realizando a soma relativa aos índices de $c_i, i = 1,2,...,n$ obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} mdx \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)dx \leq \sum_{1=1}^{n} Mdx$$

Logo, $m(b-a) \leq \sum_{i=1}^{n} f(c_i)dx \leq M(b-a)$

Tomando o limite com $n \to \infty$ nas três expressões das desigualdades, sendo, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)dx = \int_a^b f(x)\,dx$, temos:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

isto é: $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$

Portanto, o termo intermédio das desigualdades está entre $f(x_0)$ e $f(x_1)$. Segue pelo Teorema de Bolzano-Cauchy que existe pelo menos um $c \in \,]a,b[$ tal que: $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Teorema Fundamental do cálculo integral

Seja f uma função integrável num intervalo $[a,b]$ e seja F a função definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Então, em todos os pontos $x \in]a,b[$ tem-se que:

- F é uma função contínua;
- Se f é contínua, então F é uma função derivável e $F'(x) = f(x)$.

Prova: Considera um acréscimo *h* à variável x, poderemos escrever:

$$F(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt = \int_a^{x} f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt = F(x) + \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Referência histórica

Isaac Barrow (1630 – 1677) no seu estudo do movimento com velocidades variadas, fez uma abordagem muito próxima do processo moderno de diferenciação, mediante o uso do chamado triângulo diferencial. A derivada da distância era a velocidade e a operação inversa, partindo da velocidade, levava à distância. Assim, Barrow foi dos primeiros matemáticos a perceber que a diferenciação e a integração são operações inversas uma da outra.

Esta relação está na base do Teorema Fundamental do Cálculo integral estabelecido mais tarde por Newton e Leibniz.

Tarefa 37

Usa a regra de Barrow para calcular as seguintes integrais definidas:

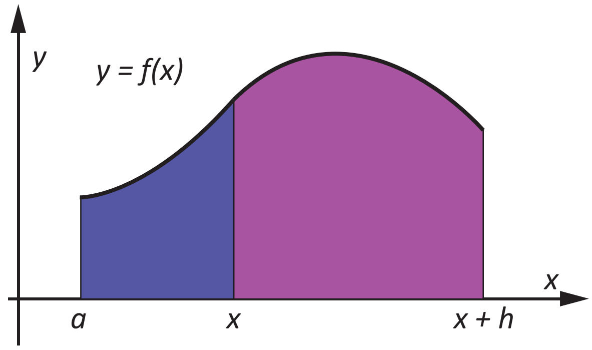
a) $\int_{-1}^{1} (2x+1)\,dx$

b) $\int_{1}^{3} x^3\,dx$

c) $\int_{1}^{2} \sqrt{x}\,dx$

d) $\int_{0}^{\pi} \cos x\,dx$

e) $\int_{0}^{\pi/4} sen 2x\,dx$



Pelo teorema da média, existe um valor $c \in \left]x, x+h\right[$, tal que:

$$\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt = f(c).h$$

Então, $F(x+h) = F(x) + f(c).h$.

Dividindo ambos os membros por h e fazendo $h \to 0$, temos a definição de derivada da função. Ou seja,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(c) .$$

O cálculo deste limite garante que c tende para x e pela continuidade da função, $f(c)$ tende para $f(x)$ e $F'(x) = f(x)$.

Assim: $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$ é uma primitiva para a função f .

O teorema fundamental do cálculo integral permite exprimir a integral definida de uma função em termos de uma sua função **primitiva**.

Em consequência deste teorema podemos obter uma fórmula para o cálculo da integral definida, conhecida por **Regra de Barrow**:

Seja f uma função contínua num intervalo $[a,b]$ e F uma primitiva de f , então, $\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_{a}^{b} = F(b) - F(a)$.

Exemplo:

Usando a fórmula de Barrow, calcular a área da figura delimitada pela parábola $y = x^2$, o eixo Ox e as retas verticais $x = 1$ e $x = 2$.

Sugestão: começa por fazer um esboço do gráfico que ilustra a situação.